2/a- $\forall n \in IN^*; f(n) < 1 < g(n)$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*; nLog\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)Log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*; Log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] < 1 < Log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)}\right]$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e^1 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)}$.

b- $\forall n \in IN^*; v_n - u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right] = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n}$

Or $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ donc $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n} < \frac{e}{n}$.

Ainsi $\forall n \in IN^*; v_n - u_n < \frac{e}{n}$.

c- • D'une part $\forall n \in IN^*; u_n < e$.

• D'autre part $\forall n \in IN^*; e < v_n$

$\Rightarrow \forall n \in IN^*; e - u_n < v_n - u_n$ or on sait que $v_n - u_n < \frac{e}{n}$

$\Rightarrow \forall n \in IN^*; e - u_n < \frac{e}{n} \Leftrightarrow \forall n \in IN^*; e - \frac{e}{n} < u_n$.

Ainsi $\forall n \in IN^*; e - \frac{e}{n} < u_n < e$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e - \frac{e}{n}\right) = e$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

★ $\forall n \in IN^*; e < v_n < \frac{e}{n} + u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = e$.